



TITLE:

Pieri Rules for Symplectic and Factorial Q -Functions (Representation Theory and Combinatorics)

AUTHOR(S):

岡田, 聡一

CITATION:

岡田, 聡一. Pieri Rules for Symplectic and Factorial Q -Functions (Representation Theory and Combinatorics). 数理解析研究所講究録 2018, 2075: 73-87

ISSUE DATE:

2018-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/242059>

RIGHT:

Pieri Rules for Symplectic and Factorial Q -Functions

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一 (Soichi OKADA)

Soichi Okada

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

古典的な Pieri 規則は、任意の Young 図形に対応する Schur 関数と完全対称関数（つまり、1 行の Young 図形に対応する Schur 関数）との積の分解を記述している。つまり、

定理 1.1. (Pieri [17]) 長さ n 以下の分割 λ に対して、対応する Schur 関数を $s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ と表す。長さ n 以下の分割 μ と正整数 r に対して、

$$s_\mu(x)s_{(r)}(x) = \sum_{\lambda} s_\lambda(x). \quad (1)$$

ここで、 λ は $\lambda \succ \mu$, $|\lambda| - |\mu| = r$ をみたす長さ n 以下の分割全体をわたる。ただし、 $\lambda \succ \mu$ は

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots$$

が成り立つことを意味し、 $|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$ である。

Pieri 規則は、2 つの任意の Schur 関数の積の分解を記述する Littlewood–Richardson 規則の特別な場合である。しかし、[1] のように、Pieri 型規則から Littlewood–Richardson 型規則を導くこともできる。また、Pieri 型規則自体が、表現論、組合せ論などさまざまな分野で利用されている。例えば [13], [15] では平面分割、半標準盤の組合せ論に応用されている。

定理 1.1 と類似の Pieri 型規則は、Hall–Littlewood 関数、Macdonald 関数（例えば [8] を見よ）や、古典群の既約指標（例えば [15] を見よ）などの Schur 関数の類似物に対しても知られている。ここでは、Schur の P 関数、斜交 Schur 関数（定義は § 2 を見よ）に対する Pieri 型規則を与えておく。

定理 1.2. (1) (Morris [11]) 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して、対応する Schur の P 関数を $P_\lambda(x)$ と表す。長さ n 以下のストリクトな分割 μ と正整数 r に対して、

$$P_\mu(x)P_{(r)}(x) = \sum_{\lambda} 2^{a(\lambda, \mu)-1} P_\lambda(x). \quad (2)$$

ここで、 λ は $\lambda \succ \mu$, $|\lambda| - |\mu| = r$ をみたす長さ n 以下のストリクトな分割全体をわたり、

$$a(\lambda, \mu) = \#\{i : \lambda_i > \mu_i > \lambda_{i+1}\}$$

である.

- (2) (Sundaram [18]) 長さ n 以下の分割 λ に対して, 対応する斜交 Schur 関数を $s_\lambda^C(x)$ と表す. 長さ n 以下の分割 λ と正整数 r に対して,

$$s_\mu^C(x)s_{(r)}^C(x) = \sum_{\lambda} \tilde{c}_{\mu,(r)}^\lambda s_\lambda^C(x)$$

(ただし, λ は長さ n 以下の分割全体をわたる) と展開するとき, 係数 $\tilde{c}_{\mu,(r)}^\lambda$ は,

$$\mu \succ \kappa, \quad \lambda \succ \kappa, \quad (|\mu| - |\kappa|) + (|\lambda| - |\kappa|) = r$$

をみたす長さ n 以下の分割 κ の個数に等しい.

本稿では, 斜交 P 関数 (C 型ルート系に付随した Hall-Littlewood 関数で $t = -1$ としたもの) に対する Pieri 型公式 (定理 3.1) を与える. これによって, 一方の分割の長さが 1 である場合に, 斜交 P 関数に関する構造定数の正値性予想 (予想 2.6) が正しいことがわかる. また, Ivanov [6], [7] によって導入された factorial P 関数に対して, factorial パラメータが異なる場合の Pieri 係数が factorial パラメータの非負整数係数の多項式となることを示す (定理 4.3).

本稿の構成は以下の通りである. § 2 で斜交 P 関数の定義, 性質を復習した後, § 3 で斜交 P 関数に対する Pieri 型公式を与え, その証明の概要を説明する. § 4 では factorial P 関数に対する Pieri 型公式を扱う.

2 斜交 P 関数

この節では, 斜交 P 関数の定義, 諸性質を与え, 構造定数に関する予想を提示する. 詳細については [14], [16] を参照されたい.

分割とは, 非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i \geq 1} \lambda_i < \infty$ となるものである. 分割 λ に対して, $|\lambda| = \sum_{i \geq 1} \lambda_i$ を λ の大きさ, $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ を λ の長さと呼ぶ. また, 分割 λ は $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{l(\lambda)} > 0$ をみたすとき, ストリクトであるという.

まず, 古典的な Hall-Littlewood 関数について思い出しておく (詳細については [8, Chapter II] を参照されたい). n 個の変数 $x = (x_1, \dots, x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して,

$$P_\lambda(x; t) = \frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) \quad (3)$$

によって与えられる対称式を **Hall-Littlewood 関数** と呼ぶ. ここで, \mathfrak{S}_n は n 次対称群であり, $m_j = \#\{i : 1 \leq i \leq n, \lambda_i = j\}$ とおくと

$$v_\lambda^{(n)}(t) = \prod_{j \geq 0} \prod_{k=1}^{m_j} \frac{1 - t^k}{1 - t}$$

である. このとき, $P_\lambda(x; t) \in \mathbb{Z}[t][x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であり, **Schur 関数** $s_\lambda(x)$, **Schur の P 関数** $P_\lambda(x)$, **Schur の Q 関数** $Q_\lambda(x)$ は, パラメータ t を $t=0, t=-1$ と特殊化することによって,

$$\begin{aligned} s_\lambda(x) &= P_\lambda(x; 0) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}), \\ P_\lambda(x) &= P_\lambda(x; -1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}), \\ Q_\lambda(x) &= 2^{l(\lambda)} P_\lambda(x; -1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}) \end{aligned}$$

として得られる.

この Hall-Littlewood 対称関数を A 型ルート系に付随するものとして, 一般のルート系に付随した Hall-Littlewood 関数が定義される ([9, § 10] を見よ). ここでは, C_n 型ルート系に付随した場合を考える.

定義 2.1. 長さ n 以下の分割 λ に対して,

$$P_\lambda^C(x; t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^n \frac{1 - tx_i^{-2}}{1 - x_i^{-2}} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1 - tx_i^{-1}x_j}{1 - x_i^{-1}x_j} \frac{1 - tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1 - x_i^{-1}x_j^{-1}} \right) \quad (4)$$

とおき, 斜交 **Hall-Littlewood 関数** (symplectic Hall-Littlewood function) と呼ぶ. ここで, $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は C_n 型 Weyl 群であり, $m_k = \#\{i : 1 \leq i \leq n, m_i = k\}$ とおくと

$$W_\lambda(t) = \prod_{j=1}^{m_0} \frac{1 - t^{2j}}{1 - t} \cdot \prod_{k \geq 1} \prod_{j=1}^{m_k} \frac{1 - t^j}{1 - t}$$

である. このとき, 斜交 **Schur 関数** (symplectic Schur function) $s_\lambda^C(x)$, 斜交 **P 関数** (symplectic P -function) $P_\lambda^C(x)$, 斜交 **Q 関数** (symplectic Q -function) $Q_\lambda^C(x)$ は, 斜交 Hall-Littlewood 関数において $t=0, t=-1$ と特殊化することによって,

$$\begin{aligned} s_\lambda^C(x) &= P_\lambda(x; 0) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}), \\ P_\lambda^C(x) &= P_\lambda^C(x; -1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}), \\ Q_\lambda^C(x) &= 2^{l(\lambda)} P_\lambda^C(x; -1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}) \end{aligned}$$

として定義される.

一般に, $P_\lambda^C(x; t)$ は x_1, \dots, x_n に関する W 不変な Laurent 多項式であり, 係数は t に関する多項式となる. また, 斜交 Schur 関数 $s_\lambda^C(x)$ は, 斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ をもつ既約表現の指標を与える.

1 変数多項式の列 $\{g_d^C(u)\}_{d \geq 0}$ を

$$g_d^C(x + x^{-1}) = \begin{cases} (x^d - x^{-d})(x + x^{-1})/(x - x^{-1}) & (d \geq 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (d = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義すると,

$$\begin{aligned} P_\lambda^C(x) &= \left[\frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^n g_{\lambda_i}^C(x_i + x_i^{-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_i + x_i^{-1}) - t(x_j + x_j^{-1})}{(x_i + x_i^{-1}) + (x_j + x_j^{-1})} \right) \right]_{t=-1} \quad (5) \end{aligned}$$

と表すこともできる. この表示を用いると, 斜交 P 関数に対しても [8, II.8] にあるような Schur の P 関数と同様の公式が成り立つことが示される ([14] を見よ).

命題 2.2. (Nimmo 型公式) 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_{\lambda}^C(x) = \begin{cases} \frac{1}{D^C(x)} \text{Pf} \begin{pmatrix} A^C(x) & V_{\lambda}^C(x) \\ -V_{\lambda}^C(x) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda) \text{ が偶数のとき}), \\ \frac{1}{D^C(x)} \text{Pf} \begin{pmatrix} A^C(x) & V_{\lambda^0}^C(x) \\ -V_{\lambda^0}^C(x) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda) \text{ が奇数のとき}). \end{cases} \quad (6)$$

ここで,

$$\begin{aligned} D^C(x) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_j + x_j^{-1}) - (x_i + x_i^{-1})}{(x_j + x_j^{-1}) + (x_i + x_i^{-1})}, \\ A^C(x) &= \left(\frac{(x_j + x_j^{-1}) - (x_i + x_i^{-1})}{(x_j + x_j^{-1}) + (x_i + x_i^{-1})} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \\ V_{\alpha}^C(x) &= (g_{\alpha_j}^C(x_i + x_i^{-1}))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l} \end{aligned}$$

であり, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$, $\lambda^0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である.

ここで, n が偶数であるとき, $\text{Pf } A^C(x) = D^C(x)$ であることに注意する.

命題 2.3. 非負整数の狭義単調減少列 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ に対して, 交代行列 $S_{\alpha}^C(x)$ を

$$S_{\alpha}^C(x) = (P_{(\alpha_i, \alpha_j)}^C(x))_{1 \leq i, j \leq l}$$

(ただし $P_{(r,0)}^C(x) = P_{(r)}^C(x)$ とする) とおいて定める. このとき, 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_{\lambda}^C(x) = \begin{cases} \text{Pf } S_{\lambda}^C(x) & (l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \text{Pf } S_{\lambda^0}^C(x) & (l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \quad (7)$$

また, 長さ 1, 2 のストリクトな分割に対応する斜交 P 関数に対しては, 次が成り立つ.

命題 2.4. (1) 長さ 1 の分割に対応する斜交 P 関数の母関数は,

$$1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} P_{(r)}^C(x) z^r = \prod_{i=1}^n \frac{(1 + x_i z)(1 + x_i^{-1} z)}{(1 - x_i z)(1 - x_i^{-1} z)} \quad (8)$$

で与えられる.

(2) 長さ 2 のストリクトな分割 (r, s) ($r > s > 0$) に対応する斜交 P 関数は, 長さ 1 の分割に対応する斜交 P 関数を用いて

$$\begin{aligned} P_{(r,s)}^C(x) &= P_{(r)}^C(x) P_{(s)}^C(x) \\ &\quad + 2 \sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \left(P_{(r+k)}^C(x) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} P_{(r+k-2i)}^C(x) + P_{(r-k)}^C(x) \right) P_{(s-k)}^C(x) \\ &\quad + P_{(r+s)}^C(x) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} P_{(r+s-2i)}^C(x) + P_{(r-s)}^C(x) \end{aligned} \quad (9)$$

と表される.

さらに, 斜交 P 関数は, 次のようにある種の半標準盤の母関数として表すこともできる.

命題 2.5. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda^C(x) = \sum_T x^T. \quad (10)$$

ここで, T は, λ の変形 Young 図形 $S(\lambda)$ (§ 4 を見よ) の各正方形に全順序集合

$$\Gamma_n = \{1' < 1 < \overline{1'} < \overline{1} < 2' < 2 < \overline{2'} < \overline{2} < \cdots < n' < n < \overline{n'} < \overline{n}\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 6 つの条件をみたすようにしたもの全体をわたる.

- (i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である.
- (ii) 各列の成分は上から下に広義単調増加である.
- (iii) プライムのついた同じ文字は 1 つの行に 2 回以上現れない.
- (iv) プライムのつかない同じ文字は 1 つの列に 2 回以上現れない.
- (v) 各 k に対して, $k', k, \overline{k'}, \overline{k}$ のうち主対角線に現れる文字は高々 1 つである.¹
- (vi) プライムのついた文字は主対角線に現れない.

また, このような盤 T に対して, 文字 $\gamma \in \Gamma_n$ の T における出現回数を $m(\gamma)$ とするとき,

$$x^T = \prod_{k=1}^n x_i^{m(k') + m(k) - m(\overline{k'}) - m(\overline{k})}$$

である.

この節の最後に, 斜交 P 関数に関する構造定数の正值性予想を与える. C_n 型 Weyl 群 W の作用で不変な Laurent 多項式全体のなす環を $\Lambda_n^C = \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]^W$ とし, その部分環 Γ_n^C を

$$\Gamma_n^C = \{f \in \Lambda_n^C : f(t, -t, x_3, \dots, x_n) \text{ は } t \text{ によらない}\}$$

とおいて定める. このとき, 斜交 P 関数 $\{P_{(\lambda)}(x) : \lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}\}$ は Γ_n^C の基底をなす.

予想 2.6. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ, ν に対して,

$$P_\mu^C(x) P_\nu^C(x) = \sum_{\lambda} \tilde{f}_{\mu, \nu}^\lambda P_\lambda^C(x) \quad (11)$$

と展開するとき, 係数 $\tilde{f}_{\mu, \nu}^\lambda$ は非負整数である.

次の節で与える Pieri 型公式 (定理 3.1) から, この予想は $l(\nu) = 1$ の場合に正しいことがわかる.

¹[14, 定義 4.5], [16, 定義 3.6] に書いた条件は正しくなく, こちらが正しい.

3 斜交 P 関数に対する Pieri 型公式

この節では、斜交 P 関数に対する Pieri 型公式を与え、証明の概略を説明する。

2 つの分割 λ, μ が

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$$

をみたすとき、 $\lambda \succ \mu$ と書いた。この節の主定理は、次である。

定理 3.1. λ, μ をストリクトな分割とし、 r を正整数とする。このとき、展開 (11) に現れる Pieri 係数 $\tilde{f}_{\mu, (r)}^\lambda$ について、次が成り立つ。

- (1) $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ の場合を除いて、 $\tilde{f}_{\mu, (r)}^\lambda = 0$ である。
- (2) $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ の場合、

$$\tilde{f}_{\mu, (r)}^\lambda = \sum_{\kappa} 2^{a(\mu, \kappa) + a(\lambda, \kappa) - \chi[l(\mu) > l(\kappa)] - 1}. \quad (12)$$

ここで、 κ は $\mu \succ \kappa, \lambda \succ \kappa, (|\mu| - |\kappa|) + (|\lambda| - |\kappa|) = r$ をみたす長さ n 以下のストリクトな分割全体を動き、

$$a(\mu, \kappa) = \#\{i : \mu_i > \kappa_i > \mu_{i+1}\}, \quad a(\lambda, \kappa) = \#\{i : \lambda_i > \kappa_i > \lambda_{i+1}\},$$

$$\chi[l(\mu) > l(\kappa)] = \begin{cases} 1 & (l(\mu) > l(\kappa) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である。

この定理の証明では、Pieri 係数 $\tilde{f}_{\mu, (r)}^\lambda$ の母関数

$$F_\mu^\lambda(z) = 1 + 2 \sum_{r=1}^{\infty} \tilde{f}_{\mu, (r)}^\lambda z^r$$

を考える。 $P_{(r)}^C(x)$ の母関数 (8) と比較すると、

$$G_z(x) = \prod_{i=1}^n \frac{(1 + x_i z)(1 + x_i^{-1} z)}{(1 - x_i z)(1 - x_i^{-1} z)}$$

とおくとき、

$$P_\mu(x) G_z(x) = \sum_{\lambda} F_\mu^\lambda(z) P_\lambda(x)$$

となる。証明の第 1 段階は、 $F_\mu^\lambda(z)$ の行列式表示である。べき級数 $a_r^s(z)$ ($r, s \geq 0$) を

$$g_r^C(x + x^{-1}) \cdot \frac{(1 + xz)(1 + x^{-1}z)}{(1 - xz)(1 - x^{-1}z)} = \sum_{s \geq 0} a_r^s(z) g_s^C(x + x^{-1}) \quad (13)$$

によって定める。

命題 3.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ, μ に対して,

$$F_\mu^\lambda(z) = \begin{cases} \det A_\mu^\lambda & (l(\lambda) = l(\mu) \text{ のとき}) , \\ \det A_{\mu^0}^\lambda & (l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ のとき}) , \\ 0 & (\text{その他}) . \end{cases} \quad (14)$$

ここで, 同じ長さの非負整数列 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_l)$ に対して, $A_\beta^\alpha = (a_{\beta_j}^{\alpha_i}(z))_{1 \leq i, j \leq l}$ である.

証明の概略. 斜交 P 関数の表示式 (5) より

$$P_\lambda^C(x)G_z(x) = \left[\frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^n g_{\lambda_i}^C(x_i + x_i^{-1}) \frac{(1 + x_i z)(1 + x_i^{-1} z)}{(1 - x_i z)(1 - x_i^{-1} z)} \right. \right. \\ \left. \left. \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(x_i + x_i^{-1}) - t(x_j + x_j^{-1})}{(x_i + x_i^{-1}) + (x_j + x_j^{-1})} \right) \right]_{t=-1}$$

と表される. よって, Schur の P 関数 $P_\lambda(x)$ に対して Hall-Littlewood 型表示 (3) から Nimmo の公式を導くときの議論 ([12], [14] を見よ) と同様にして,

$$P_\mu(x)G_z(x) = \begin{cases} \frac{1}{D^C(x)} \text{Pf} \begin{pmatrix} A^C(x) & \tilde{V}_\mu^C(x) & \tilde{V}_{(0)}^C & 1 \\ -\tilde{V}_\mu^C(x) & O & O & 0 \\ -\tilde{V}_{(0)}^C(x) & 0 & 0 & 1 \\ -\mathbf{1} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & (n + l(\mu) \text{ が偶数のとき}) , \\ \frac{1}{D^C(x)} \text{Pf} \begin{pmatrix} A^C(x) & \tilde{V}_{\mu^0}^C(x) \\ -\tilde{V}_{\mu^0}^C(x) & O \end{pmatrix} & (n + l(\mu) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となることがわかる. ここで, $\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 の列ベクトルであり, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ に対して

$$\tilde{V}_\alpha^C(x) = \left(g_{\alpha_j}^C(x_i + x_i^{-1}) \cdot \frac{(1 + x_i z)(1 + x_i^{-1} z)}{(1 - x_i z)(1 - x_i^{-1} z)} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l}$$

である. $\tilde{V}_\alpha^C(x)$ の成分を (13) の右辺の形に表し, パフィアンの多重線型性, 交代性を用いて Nimmo 型公式 (6) が使える形に変形すると,

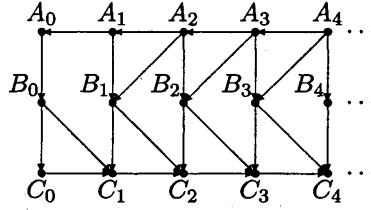
$$F_\mu^\lambda(z) = \begin{cases} \det A_\mu^\lambda & (n + l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}) , \\ \det A_\mu^{\lambda^0} & (n + l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) - 1 \text{ であるとき}) , \\ \det A_{\mu^0}^\lambda & (n + l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ であるとき}) , \\ \det A_{\mu^0}^{\lambda^0} & (n + l(\mu) \text{ が奇数であり, } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}) , \\ \det A_\mu^{\lambda^0} & (n + l(\mu) \text{ が奇数であり, } l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ であるとき}) , \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることがわかる. さらに, この行列式表示において $a_0^0(z) = 1$, $a_s^0 = 0$ ($s \geq 1$) であることを用いると, 求める表示式 (14) が得られる. \square

定理の証明の第 2 段階として, Lindström–Gessel–Vienot の補題を用いて命題 3.2 の行列式表示を組合せ論の言葉に書き直す. 有向グラフ Γ を, 次で与えられる頂点集合 V と (有向) 辺集合 E をもつものとして定義する (下図を見よ).

$$\begin{aligned} V &= \{A_i = (i, 1) : i \geq 0\} \sqcup \{B_i = (i, 0) : i \geq 0\} \sqcup \{C_i = (i, -1) : i \geq 0\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, \\ E &= \{(A_{i+1}, A_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(A_i, B_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(A_{i+1}, B_i) : i \geq 1\} \\ &\quad \sqcup \{(B_i, C_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(B_i, C_{i+1}) : i \geq 0\} \sqcup \{(C_i, C_{i+1}) : i \geq 0\}. \end{aligned}$$

A_1 から B_0 への有向辺がないことに注意しておく.



グラフ Γ の頂点の列 $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ で $(v_i, v_{i+1}) \in E$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) となるものを, Γ 上の経路という. v_0 を P の始点, v_k を P の終点と呼ぶ. 非負整数 r, s に対して, A_r を始点とし C_s を終点とする Γ 上の経路全体のなす集合を \mathcal{P}_r^s と表す. また, Γ 上の経路の組 (P_1, \dots, P_l) は, どの i, j ($i \neq j$) に対しても P_i と P_j が共有点をもたないとき, 非交差であるという. 分割 λ, μ で $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ をみたすものが与えられたとき, Γ 上の非交差経路の集合 \mathcal{L}_μ^λ を

$$\mathcal{L}_\mu^\lambda = \left\{ (P_1, \dots, P_l) : P_i \in \mathcal{P}_{\mu_i}^{\lambda_i} \ (i = 1, \dots, l), \ (P_1, \dots, P_l) \text{ は非交差} \right\}$$

(ただし, $l = l(\lambda)$ であり, $l(\mu) = l - 1$ のとき $\mu_l = 0$ とする) とおいて定義する.

非交差経路の集合 \mathcal{L}_μ^λ の母関数を考えるために, 辺の重み $\text{wt}(e) \in \mathbb{Z}[z]$ ($e \in E$) を,

$$\begin{aligned} \text{wt}(A_{i+1}, A_i) &= z, & \text{wt}(A_i, B_i) &= 1, & \text{wt}(A_{i+1}, B_i) &= z, \\ \text{wt}(B_i, C_i) &= 1, & \text{wt}(B_i, C_{i+1}) &= z, & \text{wt}(C_i, C_{i+1}) &= z \end{aligned}$$

によって定める. そして, Γ 上の経路 $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ に対して, その重み $\text{wt}(P)$ を

$$\text{wt}(P) = \prod_{i=0}^{k-1} \text{wt}(v_i, v_{i+1})$$

とおいて定義する. このとき,

命題 3.3. 分割 λ, μ が $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ をみたすとき,

$$\det A_\mu^\lambda = \sum_{(P_1, \dots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda} \prod_{i=1}^l \text{wt}(P_i). \quad (15)$$

証明の概略. 非負整数 r, s に対して,

$$b_r^s(z) = \sum_{P \in \mathcal{P}_r^s} \text{wt}(P)$$

とおくと, Lindström–Gessel–Viennot の補題 (例えば [19, 第 2 章] を見よ) により,

$$\sum_{(P_1, \dots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda} \prod_{i=1}^l \text{wt}(P_i) = \det \left(b_{\mu_i}^{\lambda_j}(z) \right)_{1 \leq i, j \leq l}$$

となることがわかる. 一方, (13) の展開と経路の母関数を具体的に計算することによって,

$$a_r^s(z) = b_r^s(z) = \begin{cases} 1 & (r=0, s=0 \text{ のとき}), \\ 2z^s & (r=0, s \geq 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (r \geq 1, s=0 \text{ のとき}), \\ 2z^{r-s}(1+z^2) \frac{1-z^{2s}}{1-z^2} & (r \geq 1, 1 \leq s \leq r-1 \text{ のとき}), \\ 2(1+z^2) \frac{1-z^{2r}}{1-z^2} - 1 & (r \geq 1, s=r \text{ のとき}), \\ 2z^{s-r}(1+z^2) \frac{1-z^{2r}}{1-z^2} & (r \geq 1, s \geq r+1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となることが確かめられる. □

以上の準備のもとで, 定理 3.1 の証明を完成させることができる.

定理 3.1 の証明の概略. 命題 3.2 より, $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ が成り立たないときは, $F_\mu^\lambda(z) = 0$ となる. $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ であるときは, 命題 3.2, 3.3 より

$$F_\mu^\lambda(z) = \sum_{(P_1, \dots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda} \prod_{i=1}^l \text{wt}(P_i).$$

ここで, ストリクトな分割 κ (ただし $l(\kappa) = l(\mu)$ あるいは $l(\mu) - 1$) に対して, 非交差経路 $(P_1, \dots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda$ で, 各 i に対して P_i が B_{κ_i} を通るもの全体のなす集合を $\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$ とおく. このとき,

$$\mathcal{L}_\mu^\lambda = \bigsqcup_{\kappa} \mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$$

であり, $\mu \succ \kappa, \lambda \succ \kappa$ でなければ $\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa) = \emptyset$ となることがわかる. また, $\mu \succ \kappa, \lambda \succ \kappa$ であるときは, $(P_1, \dots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$ に対して

$$\text{wt } P_i = z^{(\mu_i - \kappa_i) + (\lambda_i - \kappa_i)}$$

であり,

$$\#\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa) = 2^{a(\mu, \kappa) + a(\lambda, \kappa) - \chi[l(\mu) > l(\kappa)]}$$

なることを証明できる. 以上の議論から, 定理 3.1 の証明が完成する. □

4 Factorial P 関数とその Pieri 型公式

この節では, Ivanov によって導入された factorial P 関数に対して, factorial パラメータが異なる場合の Pieri 型公式を母関数形で与える.

以下, $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ をパラメータ (factorial パラメータと呼ぶ) とする. 非負整数 r に対して, factorial 単項式 $(x|\mathbf{a})^r$ を

$$(x|\mathbf{a})^r = \begin{cases} \prod_{i=0}^{r-1} (x - a_i) & (r \geq 1 \text{ のとき}), \\ 1 & (r = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおいて定義する. Factorial P 関数は, Hall–Littlewood 関数の定義 (3) で, 単項式を factorial 単項式で置き換えることによって定義される. factorial P 関数, factorial Q 関数の諸性質については [6], [7] を参照されたい.

定義 4.1. n 個の変数 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ に対して,

$$P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}; t) = \frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^n (x_i|\mathbf{a})^{\lambda_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j} \right) \quad (16)$$

によって与えられる対称式を **factorial Hall–Littlewood 関数** と呼ぶ. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}; -1), \quad Q_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = 2^{l(\lambda)} P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}; -1)$$

とおき, それぞれ factorial P 関数, factorial Q 関数と呼ぶ.

Factorial パラメータがすべて 0 であるときは, $P_\lambda(\mathbf{x}|0)$ は Schur の P 関数 $P_\lambda(\mathbf{x})$ に一致する. また, factorial P 関数, Q 関数は, 極大型直交 Grassmann 多様体, Lagrangian Grassmann 多様体のトーラス同変コホモロジーにおける Schubert 類を記述することも知られている ([4], [5] を見よ).

Factorial P 関数に対しても, Schur の P 関数と同様の Pfaffian 公式が成り立つ.

命題 4.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して,

$$P_\lambda(\mathbf{x}|\mathbf{a}) = \begin{cases} \frac{1}{D(\mathbf{x})} \text{Pf} \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & V_\lambda(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{v}_\lambda(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \frac{1}{D(\mathbf{x})} \text{Pf} \begin{pmatrix} A(\mathbf{x}) & V_{\lambda^0}(\mathbf{x}) \\ -\mathbf{v}_{\lambda^0}(\mathbf{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \quad (17)$$

ここで,

$$D(\mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}, \quad A(\mathbf{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i, j \leq n}, \quad V_\alpha(\mathbf{x}) = ((x_i|\mathbf{a})^{\alpha_j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l}$$

であり, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)})$, $\lambda^0 = (\lambda_1, \dots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である.

とおくと,

$$C_{\mu}^{\lambda}(a, z) = \prod_{k \in K} \frac{1 + a_{\mu_k} z}{1 - a_{\mu_k} z} \prod_{i=1}^r \frac{2z^{\lambda_m(i) - \mu_M(i)}}{\prod_{j=\mu_M(i)}^{\lambda_m(i)} (1 - a_j z)}$$

と表される.

特に, 係数 $c_{\mu, (r)}^{\lambda}$ は factorial パラメータ $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$ の非負整数係数の多項式である.

例えば, $\lambda = (10, 8, 6, 4, 3, 2)$, $\mu = (8, 6, 5, 4, 2, 1)$ のとき, 歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ は

$$\begin{aligned} S(\lambda/\mu) &= \begin{array}{c} \text{Diagram showing the skew Young diagram } S(\lambda/\mu) \text{ as a difference of two Young diagrams.} \end{array} \\ &= S((10, 8, 6)/(8, 6, 5)) \sqcup S((3, 2)/(2, 1)) \end{aligned}$$

と境界帯に分解され,

$$K = \begin{cases} \{4\} & (n \text{ が偶数のとき}), \\ \{4, 7\} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となるので,

$$\begin{aligned} C_{(8,6,5,4,2,1)}^{(10,8,6,4,3,2)} &= \begin{cases} \frac{1+a_4z}{1-a_4z} \cdot \frac{2z^{10-5}}{\prod_{i=5}^{10}(1-a_i z)} \cdot \frac{2z^{3-1}}{\prod_{i=1}^3(1-a_i z)} & (n \text{ が偶数のとき}), \\ \frac{1+a_4z}{1-a_4z} \cdot \frac{1+a_7z}{1-a_7z} \cdot \frac{2z^{10-5}}{\prod_{i=5}^{10}(1-a_i z)} \cdot \frac{2z^{3-1}}{\prod_{i=1}^3(1-a_i z)} & (n \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \end{aligned}$$

この定理といくつかの計算機による実験例から, 次を予想している.

予想 4.4. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ, ν が与えられたとき,

$$P_{\mu}(x|\mathbf{a})P_{\nu}(x) = \sum_{\lambda} c_{\mu, \nu}^{\lambda}(\mathbf{a})P_{\lambda}(x|\mathbf{a})$$

と展開する. このとき, 係数 $c_{\mu, \nu}^{\lambda}(\mathbf{a})$ は factorial パラメータ \mathbf{a} に関する非負整数係数の多項式である. より一般に, パラメータ $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots)$, $\mathbf{b} = (b_0, b_1, \dots)$ に対して,

$$P_{\mu}(x|\mathbf{a})P_{\nu}(x|\mathbf{b}) = \sum_{\lambda} c_{\mu, \nu}^{\lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{b})P_{\lambda}(x|\mathbf{a})$$

(ただし, $-\mathbf{b} = (-b_0, -b_1, \dots)$ である) と展開するとき, 係数 $c_{\mu, \nu}^{\lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ は \mathbf{a}, \mathbf{b} に関する非負整数係数の多項式である.

注意. Cho-Ikeda [2] は, factorial パラメータが同じ場合 (つまり, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ の場合) に, Pieri 係数 $c_{\mu, (r)}^\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ の組合せ論的な公式を与え, $c_{\mu, (r)}^\lambda$ が $a_i \pm a_j$ ($i > j$) に関する非負整数係数多項式として表されること (Graham [3] の意味での正值性) を示している.

注意. Factorial Schur 関数については, 予想 4.4 にあたる正值性が Molev-Sagan [10] によって示されている.

以下では, 定理 4.3 の証明の概要を説明する.

定理 4.3 の証明の概要. z のべき級数 $d_r^s(\mathbf{a}; z)$ ($r, s \geq 0$) を

$$(t|\mathbf{a})^r \cdot \frac{1+tz}{1-tz} = \sum_{s=0}^{\infty} d_r^s(\mathbf{a}; z)(t|\mathbf{a})^s$$

によって定義する. このとき, 命題 3.2 の証明と同様の議論により,

$$C_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = \begin{cases} \det D_\mu^\lambda & (n+l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}), \\ \det D_\mu^{\lambda^0} & (n+l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) - 1 \text{ であるとき}), \\ \det D_{\mu^0}^\lambda & (n+l(\mu) \text{ が偶数であり, } l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ であるとき}), \\ \det D_{\mu^0}^{\lambda^0} & (n+l(\mu) \text{ が奇数であり, } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}), \\ \det D_{\mu^0}^\lambda & (n+l(\mu) \text{ が奇数であり, } l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ であるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となることがわかる. ここで, $D_\beta^\alpha = \left(d_{\beta_j}^{\alpha_i}(\mathbf{a}; z) \right)_{1 \leq i, j \leq l}$ である. また, $d_s^r(\mathbf{a}; z)$ は具体的には,

$$d_r^s(\mathbf{a}; z) = \begin{cases} \frac{1+a_r z}{1-a_r z} & (s=r \text{ のとき}), \\ \frac{2z^{s-r}}{\prod_{j=r}^s (1-a_j z)} & (s > r \text{ のとき}), \\ 0 & (s < r \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる.

まず, 行列式表示と $s < r$ のとき $d_r^s(\mathbf{a}; z) = 0$ であることから,

(a) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ でなければ, $C_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = 0$ となる
ことがわかる.

そこで, 以下では $S(\lambda) \supset S(\mu)$ の場合を考える. このとき, 上の行列式表示と $d_r^0(\mathbf{a}; z) = 0$ ($r > 0$) であることから,

$$C_\mu^\lambda = \begin{cases} \det D_\mu^\lambda & (n+l(\mu) \text{ が偶数で } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}), \\ d_0^0(\mathbf{a}; z) \cdot \det D_\mu^\lambda & (n+l(\mu) \text{ 奇数で } l(\lambda) = l(\mu) \text{ であるとき}), \\ \det D_{\mu^0}^\lambda & (l(\lambda) = l(\mu) + 1 \text{ であるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

が導かれる. そして, 次を示すことができる.

- (b) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり, $\lambda_{k+1} < \mu_k$ となる k が存在するならば, $C_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = C_{\mu'}^{\lambda'}(\mathbf{a}; z) \cdot C_{\mu''}^{\lambda''}(\mathbf{a}; z)$ である. ここで,

$$\begin{aligned}\lambda' &= (\lambda_1, \dots, \lambda_k), & \mu' &= (\mu_1, \dots, \mu_k), \\ \lambda'' &= (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m), & \mu'' &= (\mu_{k+1}, \dots, \mu_m).\end{aligned}$$

- (c) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり, $\lambda_k = \mu_k > 0$ となる k が存在するならば, $C_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = C_{\mu'}^{\lambda'}(\mathbf{a}; z) \cdot d_{\mu_k}^{\lambda_k}(\mathbf{a}; z) \cdot C_{\mu''}^{\lambda''}(\mathbf{a}; z)$ である. ここで,

$$\begin{aligned}\lambda' &= (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}), & \mu' &= (\mu_1, \dots, \mu_{k-1}), \\ \lambda'' &= (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m), & \mu'' &= (\mu_{k+1}, \dots, \mu_m).\end{aligned}$$

さらに, $t > s > r$ のとき

$$d_r^t(\mathbf{a}; z) = d_r^s(\mathbf{a}; z) \cdot \frac{z^{t-s}}{(1 - a_{s+1}z) \cdots (1 - a_t z)}$$

であることに注意し, 行列の基本変形を用いると,

- (d) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり, 歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ は連結であるが, 2×2 の正方形を含むならば, $C_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = 0$ となる

ことが証明できる.

以上の主張 (a), (b), (c), (d) により, 定理の証明は $S(\lambda/\mu)$ が境界帯であるときの $\det D_\mu^\lambda$ (あるいは $\det D_{\mu^0}^\lambda$) の計算に帰着される. つまり, λ, μ が

$$\lambda_1 > \mu_1 = \lambda_2 > \mu_2 = \lambda_3 > \cdots > \mu_{l-1} = \lambda_l > \mu_l \geq 0$$

をみたすとき,

$$\det D_\mu^\lambda(\mathbf{a}; z) = \frac{2z^{\lambda_1 - \mu_l}}{\prod_{i=\mu_l}^{\lambda_1} (1 - a_i z)}$$

となることを示せばよいが, これは l に関する帰納法と $d_r^s(\mathbf{a}; z)$ の具体形を用いることによって証明できる.

以上をまとめると, 定理の主張が導かれる. □

参考文献

- [1] A. Buch, A. Kresch, and H. Tamvakis, Littlewood–Richardson rules for Grassmannians, *Adv. Math.* **185** (2004), 80–90.
- [2] S. Cho and T. Ikeda, Pieri rule for the factorial Schur P -functions, in “Schubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes”, eds. J. Buczyński, M. Michałek, and E. Postingshel, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., 2018, pp. 25–48.
- [3] W. Graham, Positivity in equivariant Schubert calculus, *Duke Math. J.* **109** (2001), 599–614.

- [4] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, *Adv. Math.* **215** (2007), 1–23.
- [5] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, *Trans. Amer. Math. Soc.* **361** (2009), 5193–5221.
- [6] V. N. Ivanov, Combinatorial formula for factorial Schur Q -functions, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **107** (2001), 4195–4211.
- [7] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q -functions, *J. Math. Sci. (N.Y.)* **131** (2005), 5495–5507.
- [8] I. G. Macdonald, “Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition”, Oxford Univ. Press, 1995.
- [9] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, *Sém. Lothar. Combin.* **45** (2000/01), Art. B45a.
- [10] A. I. Molev and B. E. Sagan, A Littlewood–Richardson rule for factorial Schur functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **351** (1999), 4429–4443.
- [11] A. O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, *J. London Math. Soc.* **39** (1964), 481–488.
- [12] J. J. C. Nimmo, Hall–Littlewood symmetric functions and the BKP equation, *J. Phys. A* **23** (1990), 751–760.
- [13] S. Okada, (q, t) -Deformations of multivariate hook product formulae, *J. Algebraic Combin.* **32** (2010), 399–416.
- [14] 岡田 聡一, Schur Q -functions and symplectic Q -functions, 2016 年度表現論シンポジウム講演集, 2016, pp. 111–132.
- [15] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), #P4.43
- [16] 岡田 聡一, Symplectic Q -functions, 数理解析研究所講究録 **2039** 「リー型の組合せ論」 (2017), 90–105.
- [17] M. Pieri, Sul problema degli spazi secanti, *Rend. Ist. Lombardo* (2) **26** (1893), 534–546.
- [18] S. Sundaram, The Cauchy identity for $Sp(2n)$, *J. Combin. Theory Ser. A* **53** (1990), 209–238.
- [19] 高崎 金久, 線形代数と数え上げ, 日本評論社, 2012.